Απ. 1 No. Date 27/11/2017

Παράδειγμα

$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1.$

Έχουμε $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ για $x \geq 0$

$f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ για $x \geq 0$

$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$

$f''(x) = -\sin x + x$

$f'''(x) = -\cos x + 1 \geq 0$

$\rightsquigarrow f'' \uparrow \quad \rightsquigarrow f''(x) \geq f''(0) \quad x \geq 0$

$\rightsquigarrow f' \uparrow \quad \rightsquigarrow f'(x) \geq f'(0) \quad x \geq 0$

$\rightsquigarrow f \uparrow \quad \rightsquigarrow f(x) \geq f(0) = 0 \quad x \geq 0.$

Παρατηρώ ότι αν $x < 0 \rightsquigarrow$ θέτω $-x \geq 0$ στα παραπάνω
(κάθε συνάρτηση από πάνω είναι περιττή)

$\rightsquigarrow x \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6}$ για $x \leq 0$

$\rightsquigarrow 1 - \frac{1}{6}x^2 \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad x \neq 0$

$\searrow \quad \downarrow \quad \swarrow$

1

Για σπίτι

Άσκηση: Ν.δ.ο. $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$

Υπόδειξη: $1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

http://www.tanenghong.com

Θεώρημα: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$, c σημείο συσσώρευσης του A.
Εάν $\lim_{x\to c} f > 0$ (ή $\lim_{x\to c} f < 0$), τότε $\exists\, \delta>0$ τ.ω.

$f(x)>0$ (ή $f(x)<0$) $\forall\, x\in A\cap(c-\delta, c+\delta)$ $x\neq c$

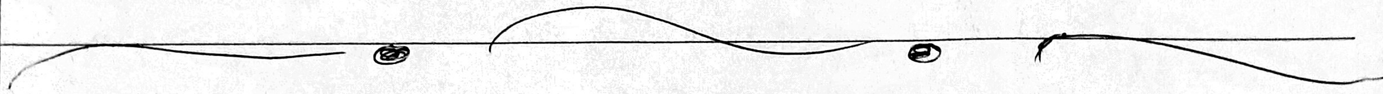
Απόδειξη

Έστω $L=\lim_{x\to c} f$ με $L>0$.

Επιλέγουμε $\epsilon = \frac{1}{2}L > 0$.

Τότε $\exists\, \delta>0$: $0<|x-c|<\delta$ $x\in A \Rightarrow |f(x)-L|<\frac{L}{2}$

$\rightsquigarrow \frac{L}{2} < f(x) < \frac{3}{2}L$ $0<|x-c|<\delta$, $x\neq c$, $x\in A$



Γενίκευση του Ορίου

Μονόπλευρα όρια

Ορισμός: Έστω $f: A\to\mathbb{R}$, c σ.σ. του $A\cap(c,\infty)=\{x\in A: x>c\}$
λέμε ότι το $L\in\mathbb{R}$ είναι δεξί όριο της f στο c και
γράφουμε $\lim_{x\to c^+} f = L$ εάν $\forall \epsilon>0\ \exists\, \delta>0$ τ.ω. $x\in A$ με
$0<x-c<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\epsilon$.

Το αριστερό όριο το γράφουμε: $\lim_{x\to c^-} f$ c σ.σ. $A\cap(-\infty,c)$
$0<c-x<\delta$

Παρατηρήσεις:

Εάν $A=(a,b)$ $a,b\in\mathbb{R}$. Τότε $\lim_{x\to a} f\ \exists \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f\ \exists$, a είναι σ.σ. του $A\cap(a,\infty)$ $=$ (a,b)

Επίσης η πάνω σχέση δίνει $\lim_{x\to a} f = \lim_{x\to a^+} f$

Ομοίως για το $\lim_{x\to b^-} f$

http://www.tanenghong.com

No. Date

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και $c \in \mathbb{R}$ σ.σ. του $A \cap (c, \infty)$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

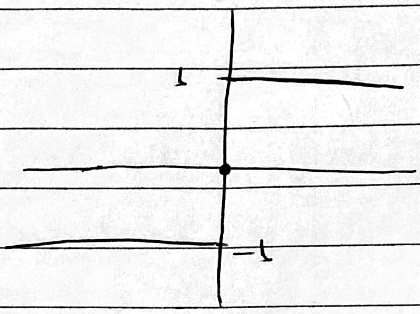
(i) $\lim_{x \to c^+} f = L$

(ii) $\forall$ ακολουθία $x_n \to c$ με $x_n \in A$ $x_n > c$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) \to L$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ $c \in \mathbb{R}$ σ.σ. του $A \cap (c, \infty)$ και του $A \cap (-\infty, c)$. Τότε:

$\lim_{x \to c} f = L \Leftrightarrow \lim_{x \to c^+} f = \lim_{x \to c^-} f = L$

<u>Παράδειγμα</u>: $f(x) = sgn(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$



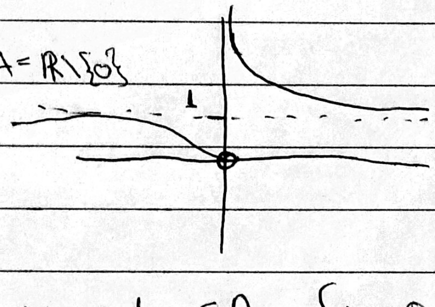
Έχουμε $\lim_{x \to 0^+} f = 1$, $\lim_{x \to 0^-} f = -1$

$(\; 0 < x < \delta$

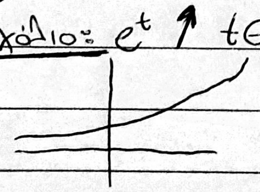
$\begin{cases} x_n \to 0 \\ x_n > 0 \end{cases}$

Αφού τα μονόπλευρα όρια είναι διαφορετικά έπεται ότι το $\lim_{x \to 0} f$ δεν υπάρχει.

<u>Παράδειγμα</u>: $g(x) = e^{1/x}$, $x \neq 0 = A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



<u>Σχόλιο</u>: $e^t \uparrow$ $t \in \mathbb{R}$



$0 < x_1 < x_2$

$\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} \overset{e > 1}{\rightsquigarrow} e^{1/x_2} < e^{1/x_1}$

Έστω $x_n = \frac{1}{n} \in A$ $(x_n > 0, \; x_n \to 0)$

$g(x_n) = e^n > 2^n = (1+1)^n \geq 1 + n$

http://www.tanenghong.com

$e>2 \rightsquigarrow g(x_n) \to +\infty$

$\rightsquigarrow \lim g(x_n) \nexists$ (στο $\mathbb{R}$) $\overset{\Theta.}{\rightsquigarrow} \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) \nexists$ (στο $\mathbb{R}$)

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} g(x) \nexists$ στο $\mathbb{R}$

$\left.\begin{matrix}\forall\, x_n \to 0 \\ x_n \neq 0\end{matrix}\right\} \rightsquigarrow g(x_n) \to l$

<u>Ορισμός:</u> $f: A \to \mathbb{R}$, c σ.σ. του A

(i) Λέμε η f τείνει στο $+\infty$ καθώς $x \to c$ και γράφουμε: $\lim\limits_{x\to c} f = +\infty$

Εάν $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\exists \delta > 0$ τ.ω. $x \in A$ με $0 < |x-c| < \delta \Rightarrow f(x) > \alpha$

(ii) Λέμε η f τείνει στο $-\infty$ καθώς $x \to c$, $\lim\limits_{x\to c} f = -\infty$

Εάν $\forall b \in \mathbb{R}$, $\exists \delta > 0$ τ.ω. $x \in A$ με $0 < |x-c| < \delta \Rightarrow f(x) < b$

<u>Παράδειγμα:</u> Ν.δ.ο. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Θέτω $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $A = \{x \neq 0\}$

Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ $(\alpha > 0)$ Επιλέγω $\delta = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$

Εάν $0 < \underset{|x-0|}{\overset{}{|x|}} < \delta \rightsquigarrow x^2 < \frac{1}{\alpha} \rightsquigarrow \frac{1}{x^2} > 0$

<u>Παράδειγμα:</u> $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

Η g δεν τείνει ούτε στο $+\infty$ ούτε στο $-\infty$ καθώς το $x \to 0$

Έστω $\alpha > 0$ [redacted]

Δεν μπορώ να πετύχω $g(x) > \alpha$ με $0 < |x| < \delta$

ομοίως η g δεν τείνει στο $-\infty$ όταν το $x \to 0$.

http://www.tanenghong.com